Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση. No. 1 Date 06/11/2019

Τάξη σύγκλισης μιας συγκλίνουσας ακολουθίας.

Μια συγκλίνουσα ακολουθία $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ είναι τάξης σύγκλισης 1 ή γραμμικής σύγκλισης αν υπάρχει $0<c<1$ και ακέραιος N τέτοιοι ώστε

$|x_{n+1}-x^*| \le c|x_n-x^*| \quad \forall n \ge N$

Είναι τάξης σύγκλισης $p>1$ (τουλάχιστον p) αν υπάρχει $C>0$ τέτοιο ώστε: $|x_{n+1}-x^*| \le c|x_n-x^*|^p$

Αν $(x_n)_{n=0}$ είναι τουλάχιστον τάξης p τότε είναι κ' τάξης q $1 \le q < p$.

$|x_{n+1}-x^*| \le c|x_n-x^*|^p = c|x_n-x^*|^q|x_n-x^*|^{p-q} = \tilde{C}|x_n-x^*|^q$

Η τάξη σύγκλισης είναι ακριβώς 1 αν υπάρχει α τέτοιο ώστε $|\alpha|<1$ και

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{x_n-x^*} = \alpha$$

Είναι ακριβώς τάξης p αν υπάρχει $C \neq 0$ τέτοιος ώστε $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x^*}{(x_n-x^*)^p} = C$

Για $p=2$ λέμε τετραγωνική σύγκλιση, ενώ για $p=3$ λέμε κυβική σύγκλιση.

$$x_{n+1}-x^* = \varphi(x_n)-\varphi(x^*) = \varphi'(\xi_n)(x_n-x^*)$$

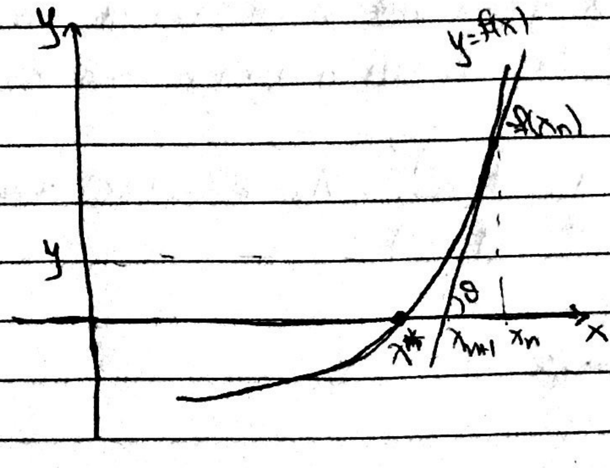
$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x^*) = \lim_{n\to\infty}\varphi'(\xi_n)(x_n-x^*)$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x^*) = \varphi'(x^*)\lim(x_n-x^*)$$

Αν $f'(x^*) \neq 0$ με $|\varphi'(x^*)|<1$ τότε είναι ακριβώς τάξης 1

Για τάξη σύγκλισης $p>1$ πρέπει $\varphi'(x^*)=0$.

Μέθοδος του Νεύτωνα:



$$\frac{y-f(x_n)}{x-x_n} = \tan\theta = f'(x_n) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = f(x_n) + (x-x_n)f'(x_n) \Leftrightarrow$$

$$0 = f(x_n) + (x_{n+1}-x_n)f'(x_n) \Leftrightarrow$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$f \in C^1[a,b]$ κ' $f'(x) \neq 0$, $x \in I$

Έστω $f \in C^2(I)$. Αναπτύσσουμε κατά Taylor την $f(x^*)$ στο x_n

$$0 = f(x^*) = \underbrace{f(x_n) + (x^* - x_n) f'(x_n)} + \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 f''(\xi_n)$$

ξ_n μεταξύ x_n κ' x^* *

Παίρνουμε ως $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) + \frac{1}{2}(x^* - x_n) \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} - x^* = \frac{1}{2}(x^* - x_n)^2 \frac{f''(\xi_n)}{f'(x_n)}$$

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x) \cdot f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\varphi'(x^*) = \frac{f(x^*) \cdot f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 0$$

Τάξη σύγκλισης > 1

Θεώρημα Τοπικής Σύγκλισης της μεθ. Newton

Έστω f τέτοια ώστε $f(x^*) = 0$, x^* απλή ρίζα της f, και f: δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή του x^*. Τότε υπάρχει κλειστό διάστημα I με κέντρο το x^* τέτοιο ώστε η ακολουθία της μεθόδου Newton συγκλίνει στο x^* $\forall x_0 \in I$ και η σύγκλιση είναι τουλάχιστον τετραγωνική.

Ισχύει $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$. Αν $f''(x^*) \neq 0$ τότε ακριβώς 2.

Επειδή x^* απλή ρίζα έχουμε $f'(x^*) \neq 0$.

Επειδή $\varphi'(x^*)=0 \Rightarrow \exists$ περιοχή I με κέντρο το x^* κ' $|\varphi'(x)| \leq L < 1$, $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in I$

Έστω $x_0 \in I$ τότε $|x_1 - x^*| = |\varphi(x_0) - \varphi(x^*)| = |\varphi'(\xi)| \cdot |x_0 - x^*| \leq L|x_0 - x^*| < |x_0 - x^*|$
το ξ μεταξύ x_0 κ' x^*.
Καλώς ορίζεται κ' συγκλίνουσα στο x^* από το Θ. συστολής.

Αναπτύσσουμε κατά Taylor την $f(x_n)$ κ' $f'(x_n)$ στο x^*.

$$f(x_n) = f(x^*) + (x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n_1})$$

$$f'(x_n) = f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2}), \quad \xi_{n_1}, \xi_{n_2} \text{ μεταξύ } x_n \text{ κ' } x^*.$$

$$(-x^*) + x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - x^* = x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n_1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})}$$

$$= x_n - x^* - \frac{(x_n - x^*) f'(x^*) + (x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n_2}) - (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2}) + \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n_1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})} =$$

$$= \frac{(x_n - x^*) f''(\xi_{n_2}) - \frac{1}{2}(x_n - x^*)^2 f''(\xi_{n_1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})} \quad (=)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x^*}{(x_n - x^*)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_{n_2}) - \frac{1}{2} f(\xi_{n_1})}{f'(x^*) + (x_n - x^*) f''(\xi_{n_2})} = \frac{1}{2} \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

Επειδή $\lim_{n\to\infty} f(\xi_{n_1}) = \lim_{n\to\infty} f(\xi_{n_2}) = f(x^*)$